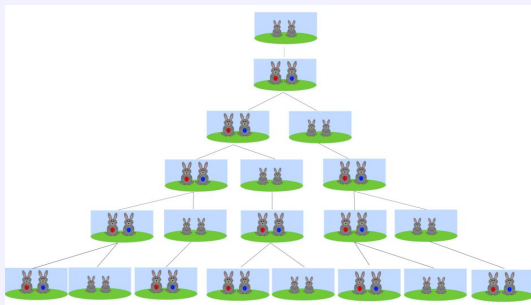


OMM - Popolazioni modelli

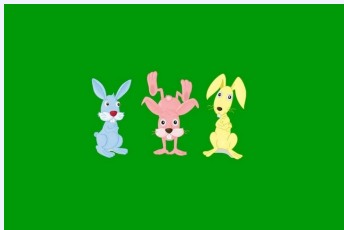
March 3, 2023

Jedna vrsta



- Par zečeva (M i Ž) su pušteni na livadu.
- Zečevi postaju polno zreli sa mesec dana.
- Trudnoća zečice traje mesec dana nakon čega na svet donosi novi par zečeva (M i Ž).
- Zečevi nikad ne umiru.
- Upareni zečevi nastavljaju da reprodukuju novi par zečeva na svakih mesec dana.

Koliko će biti zečeva za godinu dana?



- jedna vrsta
- postoji neograničeno resursa
- umiru prirodnom smrću

- homogenost razmnožavanja po broju jedinki (broj novih jedinki je proporcionalan broju jedinki)
- homogenost razmnožavanja po vremenu (nema sezonskih oscilacija)
- homogenost izumiranja po vremenu, proporcionalno broju jedinki

$$\begin{aligned}
 N(t + \Delta t) &= N(t) + n \cdot \Delta t \cdot N(t) - m \cdot \Delta t \cdot N(t) \\
 &= N(t) + \Delta t \cdot N(t) \cdot p
 \end{aligned}$$



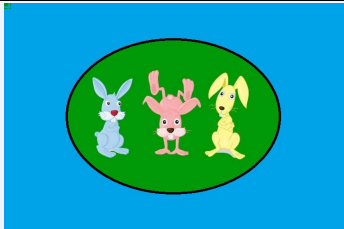
$$N(t) \in \mathbb{N}, \quad t, \Delta t, n, m, p \in \mathbb{R}$$



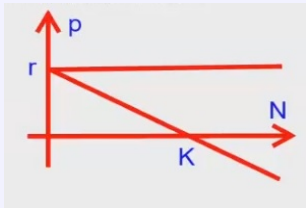
$$N(t) \in \mathbb{R}, \quad t, \Delta t, n, m, p \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = pN(t), N(0) = N_0} \implies \boxed{N(t) = N(0) \cdot e^{pt}}$$

Malthusov model



- jedna vrsta
- resursi su ograničeni (max K jedinki)
- p je funkcija od $N(t)$



Linearan slučaj:

$$p = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \text{ priraštaj}$$

$$r = p(0), \text{ reproduktivna stopa}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), N(0) = N_0 \implies N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) \cdot e^{-rt}}$$

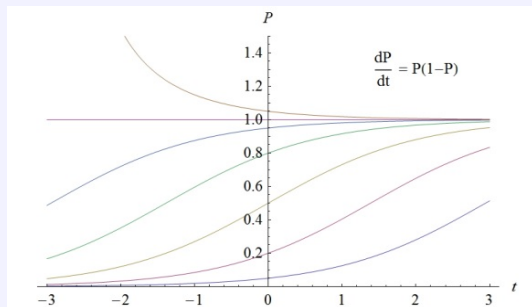
Verhulstov model

Bezdimenzioni oblik

Smena: $x(t) = \frac{N(t)}{K}$ - bezdimenziona veličina, $x \in [0, 1]$

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \quad x(0) = \frac{N(0)}{K} \implies x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x(0)} - 1\right) \cdot e^{-rt}}$$

Logistički model



2 stacionarna rešenja:

- $x = 0$ (nestabilno)
- $x = 1$ (stabilno)

Logistička kriva, S-kriva ($r = 1$)

Dve vrste (plen i grabljivci)



- 2 vrste (grabljivac i plen)
- plen se hrani kapacitetom staništa (neograničeno)
- grabljivac se hrani plenom (ograničeno)
- grabljivci nemaju neprijatelja (umiru prirodnom smrću)

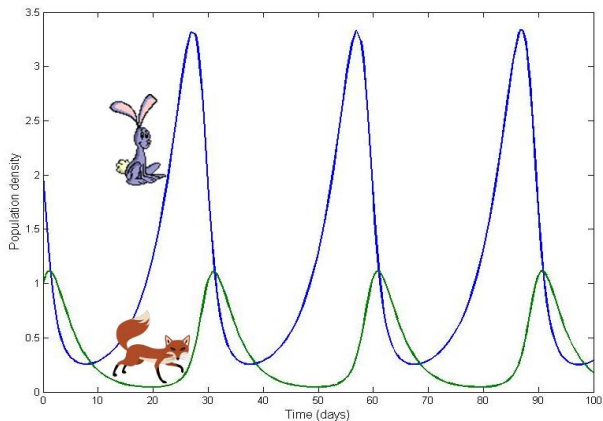
$$\frac{dP}{dt} = aP - bPG, \quad P(t_0) = P_0$$

$$\frac{dG}{dt} = cPG - mG, \quad G(t_0) = G_0$$

Lotka-Voltera model

- a - priraštaj plena
- b - stopa ulovljenog plena
- c - stopa radjanja grabljivaca
- m - mortalitet grabljivaca

Zavisnost populacija u odnosu na vreme



Bezdimenzioni oblik

Stacionarna rešenja:

- $P = G = 0$
- $P = \frac{m}{c}, G = \frac{a}{b}$

Smena:

$x(t) = \frac{P(t)}{P_S}, y(t) = \frac{G(t)}{G_S}$ - bezdimenzione veličine, ($P_S = \frac{m}{c}, G_S = \frac{a}{b}$)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(1 - y), & x(0) &= \frac{P(0)}{P_S} \\ \frac{dy}{dt} &= -my(1 - x), & y(0) &= \frac{G(0)}{G_S} \end{aligned}$$

$$\implies a(\ln(y) - y) + m(\ln(x) - x) = C$$

$$C = a(\ln(y(0)) - y(0)) + m(\ln(x(0)) - x(0))$$

\implies fazni dijagram

Populacija grabljivaca u odnosu na populaciju plena (fazni dijagram)

